Kursveränderungen einer Aktie:

7 −11 18 10 −23 −3 27 −1

(−11, 18, 10: 17)

Wann kaufen? Wann wieder verkaufen?

Gewinn: $18 + 10 - 23 - 3 + 27 = 29$

Problem: Maximum Subarray Sum (MSS)

Eingabe: $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $n \geq 1$

Ausgabe: grösstmöglich Teilsumme

$S^* = a_i + \cdots + a_j \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \leq j)$

$S^* = 0$ falls alle Zahlen negativ (leere Teilsumme)

naiver Algorithmus: berechne alle Teilsummen

$$S_{i,j} := a_i + \cdots + a_j \quad (i \le j)$$

($S_{i,j} := 0$ für $i > j$)

Anzahl Additionen: $A(n)$ (bestimmend für Laufzeit)

Pseudocode:

For $i : 1 \dots n$ — Additionen

$S_{i,i} \leftarrow a_i$	0
$S_{i,i+1} \leftarrow a_i + a_{i+1}$	$+1$
$S_{i,i+2} \leftarrow a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$	$+2$
$\vdots$	$\vdots$
$S_{i,n} \leftarrow a_i + \cdots + a_n$	$+(n-i)$

$$\frac{(n-i)\cdot(n-i+1)}{2}$$

$$\frac{(n-i)^2}{2} \le \frac{(n-i+1)^2}{2}$$

Total $(n \ge 2)$

$$A(n) \le \frac{1}{2}\left(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right) = \frac{n\cdot\overbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\le 2n}\cdot\overbrace{(n+1)}^{\le 2n}}{6} \le n^3$$

siehe Übungen

$$A(n) \ge \frac{1}{2}\left((n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2 + 0^2\right) = \frac{\overbrace{(n-1)}^{\ge n/2}\cdot\overbrace{\left(n-\frac{1}{2}\right)}^{\ge n/2}\cdot n}{6} \ge \frac{n^3}{24}$$

Also: $A(n) \le O(n^3)$ und $n^3 \le O(A(n))$ $(n \ge 2)$

Schreibweise: $A(n) = \Theta(n^3)$ "gleiche Ordnung"

geht es besser?

Idee: Addition assoziativ

$$S_{i,j} = (a_i + \cdots + a_{j-1}) + a_j = S_{i,j-1} + a_j$$

Pseudocode:

For $i : 1 \ldots n$ — Additionen

$S_{i,i} \leftarrow a_i$ — 0

$S_{i,i+1} \leftarrow S_{i,i} + a_{i+1}$ — +1

$S_{i,i+2} \leftarrow S_{i,i+1} + a_{i+2}$ — +1

$\vdots$ — $\vdots$

$S_{i,n} \leftarrow S_{i,n-1} + a_n$ — +1

} $n-i$

Total: $A(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ $\begin{cases} \leq n^2/2 \\ \geq n^2/4 \end{cases}$

$\rightsquigarrow A(n) = \Theta(n^2)$

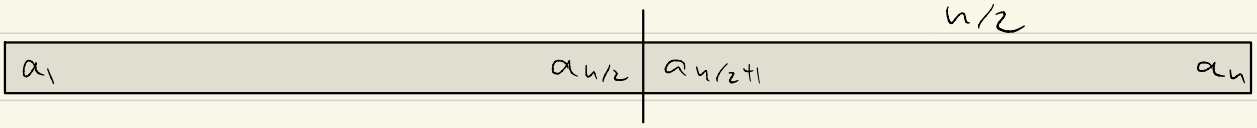
(da $\frac{n}{2} \leq n-1 \leq n$)

geht es besser?

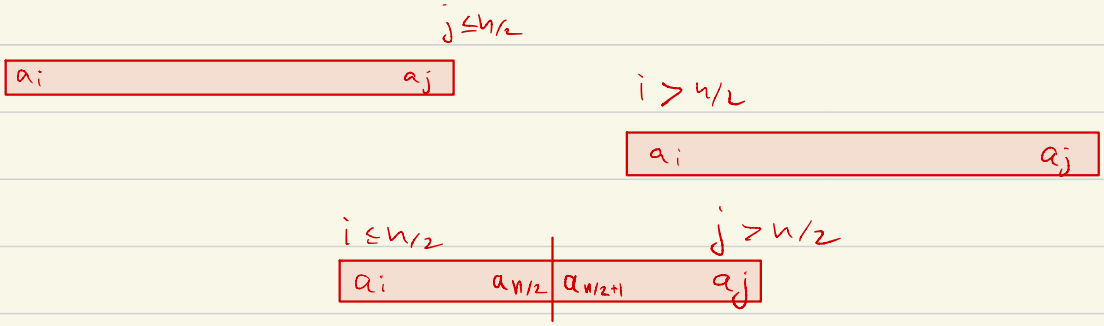
müssen wir alle $\Theta(n^2)$ Teilsummen berechnen?

MSS rekursiv

führe Lösung zurück auf Lösung (vgl. Karatsuba) mit $\frac{n}{2}$ Zahlen



3 Fälle für S^*



Algorithmus: (n gerade)

1. löse beide Hälften rekursiv (fertig in Fällen 1, 2)
2. berechne $\max \{ S_{i,j} \mid i \le n/2 < j \}$ (fertig in Fall 3)
3. Ausgabe: beste der 3 Teillösungen (deckt alle Fälle ab)

Wie geht Schritt 2?

$$\max_{i \le \frac{n}{2} < j} S_{ij} = \max_{i \le \frac{n}{2} < j} \left(S_{i,\frac{n}{2}} + S_{\frac{n}{2}+1,j} \right)$$

wähle i und j voneinander unabhängig

$$= \left(\max_{i \le \frac{n}{2}} \text{—"—} \right) + \left(\max_{j > \frac{n}{2}} \text{—"—} \right)$$

- berechne $\left(S_{\frac{n}{2}+1,j} \right)_{j=\frac{n}{2}+1}^{n}$ wie zuvor $\frac{n}{2}-1$ Additionen (siehe Pseudocode mit $i = \frac{n}{2}+1$)
- berechne $\left(S_{i,\frac{n}{2}} \right)_{i=1}^{n}$ analog $\frac{n}{2}-1$ Additionen

$\rightsquigarrow$ Schritt 2 geht mit $2 \cdot (\frac{n}{2}-1)+1 = n-1$ Additionen

Rekurrenz: $A(n) = 2 \cdot A(\frac{n}{2}) + n - 1$

Tabelle: $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$

Anzahl	Länge	Additionen
1	2^k	$+(2^k - 1)$
2	2^{k-1}	$+2 \cdot (2^{k-1} - 1) = 2^k - 2$
2^2	2^{k-2}	$+2^2 \cdot (2^{k-2} - 1) = 2^k - 2^2$
$\vdots$		
2^{k-1}	2^1	$+2^{k-1} \cdot (2^1 - 1) = 2^k - 2^{k-1}$
2^k	2^0	0
		$k \cdot 2^k - (2^k - 1) = (k-1) \cdot 2^k + 1$

$\leq k \cdot 2^k$

$= n \cdot \log_2(n)$

$\rightsquigarrow A(n) = \Theta(n \log_2 n)$ $\quad (n \geq 2)$

geht es besser?

MSS anders rekursiv

Idee: - führe zurück auf Lösung für n-1 Zahlen

- passe dafür Lösungsbegriff an

Randmaxima: $R_j := \max_{i \le j} S_{ij}$

Beispiel

j	1	2	3	4	5	6	7	8
a_j	7	-11	18	10	-23	-3	27	-1
R_j	7 →	-4	~~→~~ 18	→ 28	→ 5	→ 2	→ 29	→ 28

Algorithmus

- berechne $R_1, \dots, R_{n-1}$ rekursiv mit

$$R_j \leftarrow \begin{cases} R_{j-1} + a_j & \text{falls } R_{j-1} \ge 0 \\ a_j & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ausgabe: $S^* \leftarrow \max\{R_1, \dots, R_n\}$

Analyse

n	1	2	3	...	n	Total
$A(n)$	0	+1	+1	...	+1	$n-1$

Laufzeit $O(n)$ (- Laufzeit durch Additionen bestimmt)

geht es besser ?

nein ! Algorithmus muss alle Zahlen $a_1, \dots, a_n$ lesen ! Wie formalisieren ?

Behauptung

jeder korreke Alg für MSS muss

für jede Eingabe $a_1, \dots, a_n$

$\geq n$ Lese operationen ausführen

Beweis: per Widerspruch

angenommen:

Alg. macht $< n$ Lese op. für Eingabe $a_1, \dots, a_n$

$\rightsquigarrow$ Alg. liest ≥ 1 Eintrag a_i nicht

$\rightsquigarrow$ Ausgabe unverändert wenn a_i beliebig verändert!

$\rightsquigarrow$ Alg. nicht korrekt für MSS ↯

[wähle $a_i = 1 + \sum_{j \neq i} |a_j|$ $\rightsquigarrow$ a_i enthalten in S^*

— " — $a_i = \ominus$ — " — $\rightsquigarrow$ — " — nicht — " —

aber: Alg. liefert diesselbe Ausgabe in beiden Fällen !]